BILANGAN KOMPLEKS

Shinta Rosalia Dewi, S.Si, M.Sc

TUJUAN

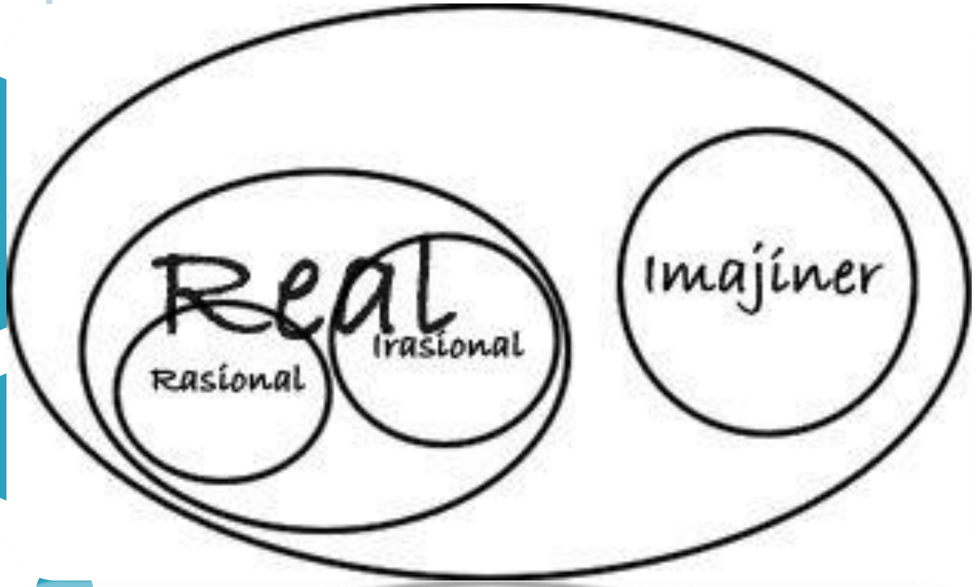
Mahasiswa diharapkan mampu :

- Memahami bilangan kompleks
- Menggambarkan kurva pada bilangan kompleks
- Mengetahui Operasi Aljabar Bilangan Kompleks
- Mengetahui bentuk-bentuk bilangan kompleks
- Menggunakan rumus de Moivre untuk menghitung pangkat suatu bilangan kompleks

PENDAHULUAN

Apakah Bilangan Kompleks itu ?

- Bilangan Kompleks adalah gabungan dari bilangan nyata (Riil) dengan bilangan imajiner



PENDAHULUAN

Apakah Bilangan Imajiner itu ?

- Bilangan yang merupakan akar kuadrat dari suatu bilangan negatif
- Contoh :

  $\sqrt{-5}, \sqrt{-7}, \sqrt{-13}$

- Definisi 1 : $i = \sqrt{-1}$ atau $j = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$
- Jadi $\sqrt{-5}$ dapat ditulis $\sqrt{-1} * \sqrt{5} = i\sqrt{5}$

PENDAHULUAN

- ✓ Bilangan kompleks dinotasikan dalam bentuk a + bi dimana a dan b merupakan bilangan real dan i merupakan bilangan imajiner
- ✓ Jika nilai $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka a+bi merupakan bilangan kompleks yang real
- ✓ Jika nilai $a = 0$ dan $b \neq 0$ maka a+bi merupakan bilangan imajiner murni

ASAL BILANGAN KOMPLEKS

Mengapa bisa muncul bilangan $\sqrt{-1}$ ***tersebut ?***

Bilangan tersebut berasal dari akar-akar persamaan kuadrat yang diperoleh dengan menggunakan rumus ABC

Masih ingatkah Anda dengan Rumus ABC ?

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

RUMUS ABC

Carilah akar-akar dari persamaan kuadrat berikut :

$x^2 - 4x + 5 = 0$

Jawab :

1. Cari nilai diskriminan D nya.

   $D = b^2 - 4ac$

   $= (-4)^2 - 4(1)(5)$

   $= 16 – 20$

   $= -4 \quad \rightarrow D < 0$

   apabila D < 0 maka persamaan tersebut tidak memiliki akar real

2. Gunakan rumus ABC

RUMUS ABC

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2.} \qquad x_1, x_2 = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2.}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{-1} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{-1}$$

Akar-akar ini merupakan akar imajiner dan apabila digunakan lambang i maka dapat ditulis :

x1 = 2 + i

x2 = 2 - i

LATIHAN 1

Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat berikut :

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

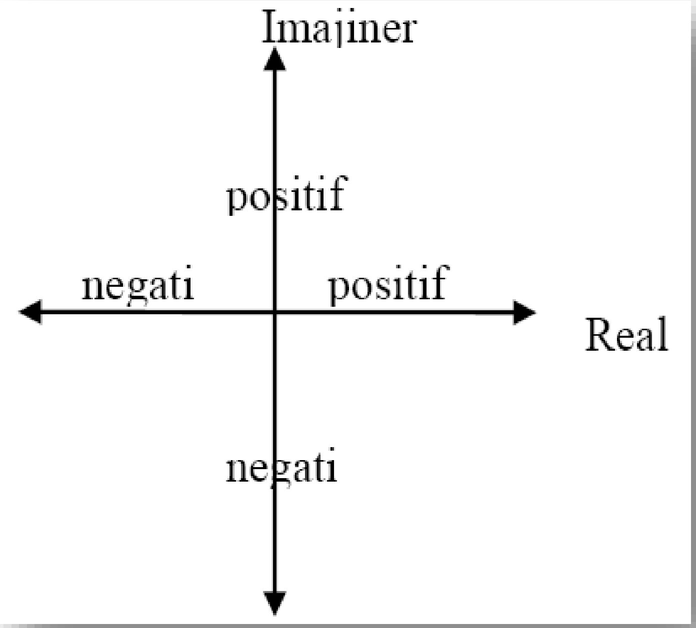
$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x^2 - x + 7 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

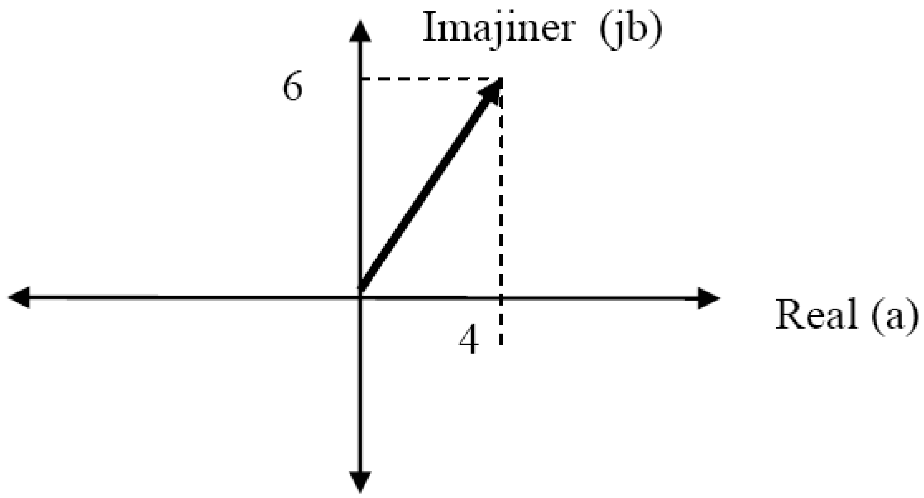
BILANGAN KOMPLEKS

- Penulisan bilangan kompleks z = a+bi sering disingkat sebagai pasangan terurut (a,b), oleh karena itu bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam suatu bidang datar seperti halnya koordinat titik dalam sistem koordinat kartesius
- Bidang yang digunakan untuk menggambarkan bilangan kompleks disebut **bidang kompleks** atau **bidang argand**



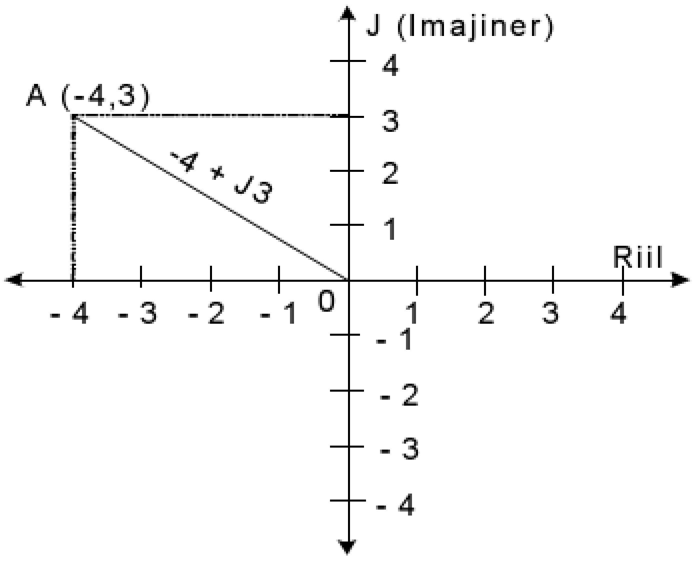
BILANGAN KOMPLEKS

- Buatlah grafik bilangan kompleks berikut :
  $x = 4 + 6j$ dimana :
  4 merupakan bilangan real positif
  6j merupakan bilangan imajiner positif



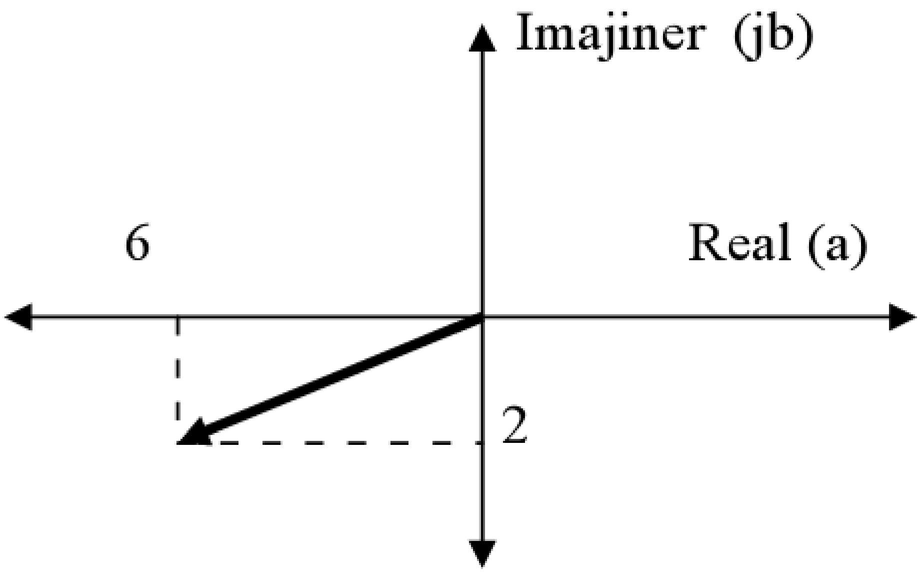
Latihan 2

- Buatlah grafik bilangan kompleks berikut :
  x = -4 + 3j dimana :
  -4 merupakan bilangan real negatif
  3j merupakan bilangan imajiner positif



Latihan 3

- berapa nilai bilangan kompleks dari grafik berikut:



$$x = -6 - j2$$

Latihan 4

- Buatkan kedalam bentuk grafis bilangan kompleks berikut:

  $x = 4 - j\,6$

  $x = -7$

  $x = -6 - j\,13$

  $x = j11$

OPERASI ALJABAR

Perlu diperhatikan :

1. $-z$ (negatif z).

   Jika $z = x + iy$ maka $-z = -x - iy$.

2. $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ (kebalikan z)

   Jika $z = x + iy$ maka $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\,\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

OPERASI ALJABAR

Operasi aljabar pada bilangan kompleks sesuai dengan operasi aljabar pada bilangan riil.

Operasi Aljabar pada bilangan kompleks

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$.

a. Penjumlahan : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

b. Pengurangan : $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

c. Perkalian :

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

d. Pembagian :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0$$

OPERASI ALJABAR

Sifat Operasi Aljabar

a. Hukum komutatif

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

b. Hukum asosiatif

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\,(z_2 z_3)$$

c. Hukum distributif

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

d. Elemen netral dalam penjumlahan ($0 = 0 + 0\,i$)

$$z + 0 = 0 + z = z$$

e. Elemen netral dalam perkalian ($1 = 1 + 0\,i$)

$$z\,.1 = 1.\,z = z$$

OPERASI ALJABAR

Contoh :

1. $(2 + 5i) + (3 - 2i) = 5 + 3i$
2. $(4 - 7i) - (2 + 3i) = 2 - 10i$
3. $(1 + 3i)(5 - 4i) = 5 - (-4i) + 15i - 12\,i^2 = 17 + 11i,\ i^2 = -1$
4. $\dfrac{(17+11i)}{(1+3i)} = \dfrac{(17+11i)}{(1+3i)} \cdot \dfrac{(1-3i)}{(1-3i)} = 5 - 4i$

OPERASI ALJABAR

5. Tunjukkan bahwa (3,1) (3,-1) (1/5, 1/10) = (2,1)

Hasil kali dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ adalah

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$= x_1x_2 + i^2y_1y_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2$, ingat bahwa $i = \sqrt{-1}$, sehingga $i^2 = -1$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Apabila bilangan kompleks z_1 dan z_2 ditulis sebagai pasangan terurut, maka

$z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, dan hasil kalinya adalah

$$z_1z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

OPERASI ALJABAR

5. Tunjukkan bahwa (3,1) (3,-1) (1/5, 1/10) = (2,1)

Diketahui bahwa perkalian matriks bersifat komutatif dan asosiatif, sehingga $z_1z_2z_3$ dapat dihitung z_1z_2 dulu, kemudian dikalikan z_3 atau dihitung z_2z_3 dulu, kemudian dikalikan dengan z_1. Cara mana yang akan dipilih, hasilnya akan sama.

Apabila kita hitung dulu, kemudian dikalikan , maka perhitungannya adalah sebagai berikut:

OPERASI ALJABAR

5. Tunjukkan bahwa (3,1) (3,-1) (1/5, 1/10) = (2,1)

$$(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right) = (9+1,-3+3)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)$$

$$= (10,0)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{5}-0, 0+\frac{10}{10}\right)$$

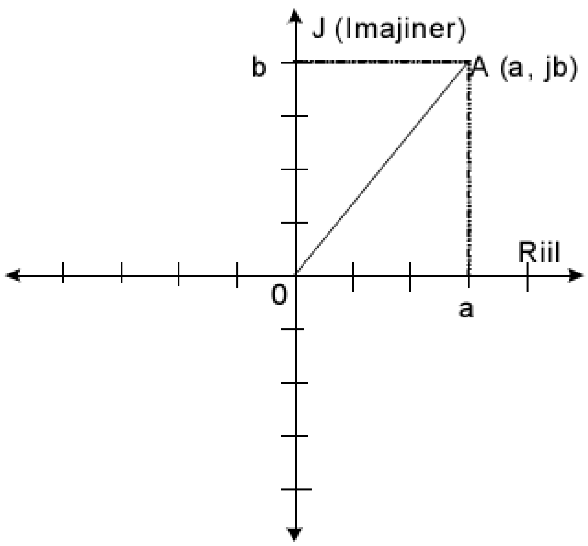
$$= (2,1)$$

Bentuk-bentuk Bilangan Kompleks

- Ada beberapa bentuk penulisan bilangan kompleks yaitu :
  - Bentuk Rectangular
  - Bentuk Polar
  - Bentuk Exponensial
  - Bentuk Pangkat

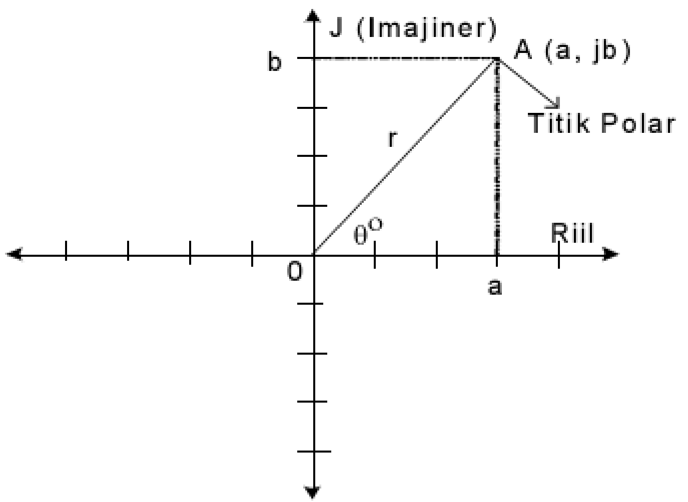
BENTUK REKTANGULAR

- Bentuk bilangan kompleks a + jb disebut juga bilangan kompleks bentuk rektangular
- Gambar grafik bilangan kompleks bentuk rektangular :
- Dari gambar tersebut titik A mempunyai koordinat (a,jb). Artinya titik A mempunyai absis a dan ordinat b.



BENTUK POLAR

- Bilangan kompleks bentuk rektangular a+ jb dapat juga dinyatakan dalam bentuk polar, dengan menggunakan suatu jarak (r) terhadap suatu titik polar θ
- Jika OA = r, maka letak (kedudukan) titik A dapat ditentukan terhadap r dan θ .



BENTUK POLAR

Sehingga rumus yang didapatkan untuk mengubah suatu bilangan kompleks dari bentuk rektangular ke bentuk polar adalah:

$$a + jb = r\,(Cos\,\theta° + j\,Sin\,\theta°) = r\angle\,\theta°$$

r adalah sisi miring, yang nilainya adalah :

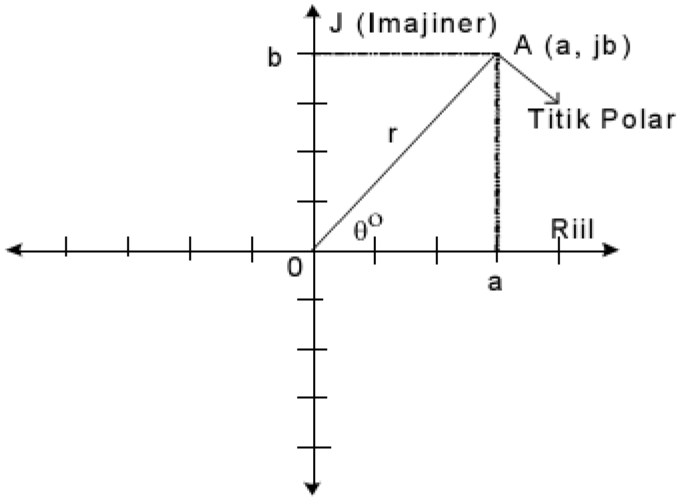
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Besar sudut kemiringan dengan θ :

$$\theta = \text{arc tg } b/a$$

BENTUK EKSPONENSIAL

- Bentuk eksponensial diperoleh dari bentuk polar.
- Harga r dalam kedua bentuk itu sama dan sudut dalam kedua bentuk itu juga sama, tetapi untuk bentuk eksponensial harus dinyatakan dalam radian.



$$\hat{z} = r \, . \, e^{j\theta}$$

dengan $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ dinamakan *rumus Euler*.

Operasi aljabar bentuk eksponen

Misalkan $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

a. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

b. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

c. Invers sebarang bilangan kompleks $z = r e^{i\theta}$ yaitu

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

Bentuk Pangkat dan Rumus Moivre

Bentuk pangkat

Misalkan $z = re^{i\theta}$, maka menggunakan aturan pangkat seperti pada bilangan riil diperoleh

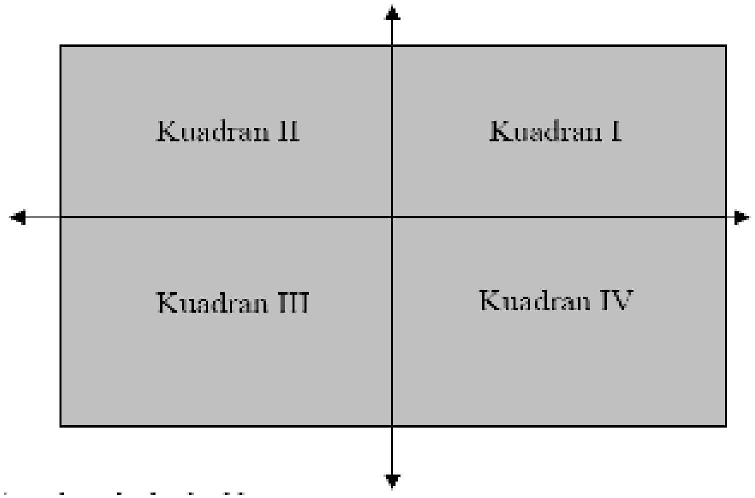
$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Rumus Moivre

Jika $r = 1$, maka bentuk pangkat di atas menjadi $z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, atau $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ yang disebut *Rumus Moivre*.

KUADRAN

- Selain itu, perlu diketahui pula letak posisi sudut berada kuadran berapa dari garis bilangan. Dimana :
  - Kuadran I berada pada sudut ke 0 - 90
  - Kuadran II berada pada sudut ke 90 - 180
  - Kuadran III berada pada sudut ke 180 – 270 atau (-90) – (-180)
  - Kuadran IV berada pada sudut ke 270 – 360 atau 0 – (-90)



CONTOH SOAL

Perhatikan persamaan bilangan kompleks berikut z = 3 – j8 bentuk umum bilangan kompleks diatas dapat dirubah ke dalam bentuk-bentuk penulisan yang lain.

$$r = \sqrt{3^2 + 8^2} \longrightarrow r = 8{,}54$$

Sudut yang dibentuk adalah $\theta = \text{arc tg } (-8/3) = -69{,}44$ di kuadran IV

Bentuk Polar nya :

z = r(cosθ + j sinθ) = 8.54(cos(-69.44) + j sin(-69.44))

Bentuk Exponensialnya :

$$z = r.e^{j\theta} = 8{,}54.e^{-j.69{,}44}$$

PERKALIAN & PERPANGKATAN

Perkalian bilangan kompleks dalam bentuk polar

Misalkan $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right],\ z_2 \neq 0$$

PERKALIAN & PERPANGKATAN

Sekarang bagaimana menghitung akar dari bilangan kompleks?

Misalkan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \text{ dimana } k = 0, 1, \ldots, n-1, \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

PERKALIAN & PERPANGKATAN

Rumus de Moivre

1. Buktikan bahwa $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$ untuk semua $\theta \in \mathbb{R}$.

Jawab:

Misalkan $s = \sin\theta$ dan $c = \cos\theta$. Berdasarkan teorema De Moivre, maka

$$\cos 4\theta + i\sin 4\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$$

$$= \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta(i\sin\theta)^2 + 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$$

$$= (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta)$$

PERKALIAN & PERPANGKATAN

Rumus de Moivre

Sekarang bandingkan bagian imajinernya saja, yaitu:

$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$$

$$= 4\cos\theta\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right) - 4\cos\theta\sin^3\theta$$

$$= 4\cos\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$$

$$= 4\cos\theta\sin\theta - 8\cos\theta\sin^3\theta$$

$$= 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$$

LATIHAN

Tuliskan bentuk polar dan eksponensial dari :

1. $1+ i$
2. $-3 - 4i$
3. $\left(\dfrac{6+8i}{4-3i}\right)^2$